2. ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ, БАЗИСИ И ДИМЕНЗИОНАЛНОСТ

(2.1) Показати да је одређени скуп вектора *линеарно зависан* ако је неки од вектора тог скупа скаларни умножак другог. Директно и као последицу овог става доказати да је скуп вектора *линеарно зависан* ако садржи нулти вектор.

Нека је дат скуп вектора $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle, \ldots\}$. $\mathbb{P}_n$

Линеарна комбинација поменутог скупа је $\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle + \ldots + \alpha_n|v_n\rangle + \ldots$ Ако су вектори датог скупа линеарно зависни онда је поменута линеарна комбинација једнака нултом вектору, али тако да један од коефицијената у њој мора бити различит од нуле. Нека то буде, нпр. коефицијент α_1. Следи

$$\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle + \alpha_3|v_3\rangle + \ldots + \alpha_n|v_n\rangle + \ldots = |0\rangle$$
$$\alpha_1 \neq 0$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_1}|v_1\rangle + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}|v_2\rangle + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}|v_3\rangle + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}|v_n\rangle + \ldots = |0\rangle$$
$$\Leftrightarrow |v_1\rangle = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}|v_2\rangle - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}|v_3\rangle - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}|v_n\rangle - \ldots$$
$$\left[\!\left[\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \beta_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right]\!\right]$$
$$\Rightarrow |v_1\rangle = \beta_2|v_2\rangle + \beta_3|v_3\rangle + \ldots + \beta_n|v_n\rangle + \ldots$$

те је јасно да је вектор $|v_1\rangle$ заиста линеарна комбинација осталих вектора датог скупа. Сад, да би први вектор био скаларни умножак другог, довољно је ставити да су сви коефицијенти једнаки нули сем β_2, значи $\beta_3 = \ldots = \beta_n = 0$. Биће

$$|v_1\rangle = \beta_2|v_2\rangle = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}|v_2\rangle .$$

Наравно да за овакве вредности коефицијената $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ скуп вектора не може бити линеарно независан - за то би баш сви коефицијенти линеарне комбинације морали да буду једнаки нули, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$.

(2.2) Да ли су следећи вектори *линеарно независни* у простору $\mathbb{V}(\mathbb{F})$

(а) $\mathbb{V}=\mathbb{P}^4,\ \mathbb{F}=\mathbb{R}:\ \begin{array}{l} |v_1\rangle = t^3-3t^2+5t+1 \\ |v_2\rangle = t^3-t^2+8t+2 \\ |v_3\rangle = 2t^3-4t^2+9t+5 \end{array}$; (б) $\mathbb{V}=\mathbb{P}^4,\ \mathbb{F}=\mathbb{R}:\ \begin{array}{l} |v_1\rangle = t^3+4t^2-2t+3 \\ |v_2\rangle = t^3+6t^2-t+4 \\ |v_3\rangle = 3t^3+8t^2-8t+7 \end{array}$;

(в) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{22},\ \mathbb{F}=\mathbb{R}:\ |v_1\rangle=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ |v_2\rangle=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ |v_3\rangle=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$; (г) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{22},\ \mathbb{F}=\mathbb{R}:\ |v_1\rangle=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix},\ |v_2\rangle=\begin{bmatrix}3&-1\\2&2\end{bmatrix},\ |v_3\rangle=\begin{bmatrix}1&-5\\-4&0\end{bmatrix}$;

(д) $\mathbb{V}=\mathbb{P}^4,\ \mathbb{F}=\mathbb{R}:\ \begin{array}{l} |v_1\rangle = (t-a)(t-b) \\ |v_2\rangle = (t-b)(t-c) \\ |v_3\rangle = (t-c)(t-a) \end{array}$, где су a,b,c реалне константе.

(а) $\mathbb{V}=\mathbb{P}^4,\ \mathbb{F}=\mathbb{R}:\ \begin{array}{l} |v_1\rangle = t^3-3t^2+5t+1 \\ |v_2\rangle = t^3-t^2+8t+2 \\ |v_3\rangle = 2t^3-4t^2+9t+5 \end{array}$

Базис простора $\mathbb{P}^4$ чини скуп функција $\{t^0,t^1,t^2,t^3\}\equiv\{1,t,t^2,t^3\}$.

Вектори $|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle$ су *линеарно независни* када је њихова линеарна комбинација једнака нултом вектору акко су коефицијенти у линеарној комбинацији сваки понаособ једнаки нули, што ће сада бити проверено

$$\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle=|0\rangle$$
$$\alpha_1(t^3-3t^2+5t+1)+\alpha_2(t^3-t^2+8t+2)+\alpha_3(2t^3-4t^2+9t+5)=0t^3-0t^2+0t+0$$
$$\alpha_1t^3-3\alpha_1t^2+5\alpha_1t+\alpha_1+\alpha_2t^3-\alpha_2t^2+8\alpha_2t+2\alpha_2+2\alpha_3t^3-4\alpha_3t^2+9\alpha_3t+5\alpha_3=0t^3-0t^2+0t+0$$
$$t^3(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)+t^2(-3\alpha_1-\alpha_2-4\alpha_3)+t(5\alpha_1+8\alpha_2+9\alpha_3)+(\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3)=0t^3-0t^2+0t+0$$

Да би последњи израз важио, потребно је да коефицијенти уз $\{t^0,t^1,t^2,t^3\}$ са обе стране буду једнаки

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\ /\cdot 3\\ -3\alpha_1-\alpha_2-4\alpha_3=0\\ 5\alpha_1+8\alpha_2+9\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3=0\\ -3\alpha_1-\alpha_2-4\alpha_3=0\\ 5\alpha_1+8\alpha_2+9\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha_2+2\alpha_3=0\\ 5\alpha_1+8\alpha_2+9\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 \\ 5\alpha_1 - 8\alpha_3 + 9\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 \\ 5\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_3 = -5\alpha_1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 5\alpha_1 \\ \alpha_3 = -5\alpha_1 \\ \alpha_1 + 10\alpha_1 - 10\alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 5\alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = -5\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Будући да су $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, то значи да су вектори $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle$ *линеарно независни*.

$$(б)\ \ \mathbb{V} = \mathbb{P}^4,\ \mathbb{F} = \mathbb{R}:\ \begin{array}{l} |v_1\rangle = t^3 + 4t^2 - 2t + 3 \\ |v_2\rangle = t^3 + 6t^2 - t + 4 \\ |v_3\rangle = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7 \end{array}$$

Базис простора $\mathbb{P}^4$ чини исти скуп функција као у случају (а) $\{t^0, t^1, t^2, t^3\} \equiv \{1, t, t^2, t^3\}$.

Вектори $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle$ су *линеарно независни* када је њихова линеарна комбинација једнака нултом вектору акко су коефицијенти у линеарној комбинацији сваки понаособ једнаки нули, што ће сада бити проверено

$$\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle + \alpha_3|v_3\rangle = |0\rangle$$

$$\alpha_1(t^3 + 4t^2 - 2t + 3) + \alpha_2(t^3 + 6t^2 - t + 4) + \alpha_3(3t^3 + 8t^2 - 8t + 7) = 0t^3 - 0t^2 + 0t + 0$$

$$\alpha_1 t^3 + 4\alpha_1 t^2 - 2\alpha_1 t + 3\alpha_1 + \alpha_2 t^3 + 6\alpha_2 t^2 - \alpha_2 t + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 t^3 + 8\alpha_3 t^2 - 8\alpha_3 t + 7\alpha_3 = 0t^3 - 0t^2 + 0t + 0$$

$$t^3(\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) + t^2(4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3) + t(-2\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3) + (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3) = 0t^3 - 0t^2 + 0t + 0$$

Да би последњи израз важио, потребно је да коефицијенти уз $\{t^0, t^1, t^2, t^3\}$ са обе стране буду једнаки

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \ / \cdot(-4) \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha_1 - 4\alpha_2 - 12\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \ / \cdot(-1/2) \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - 10\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -5\alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -5\alpha_3 \\ -15\alpha_3 + 8\alpha_3 + 7\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -5\alpha_3 \\ \alpha_2 = 2\alpha_3 \\ \alpha_3 \text{ - произвољан} \end{cases}$$

Будући да α_1, α_2 зависе од α_3 који је *произвољан* реалан број - не мора да буде само нула као у случају (а) - то значи да су вектори $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle$ *линеарно зависни*.

(в) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{22}$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$: $|v_1\rangle=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, |v_2\rangle=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, |v_3\rangle=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Базис простора $\mathbb{R}^{22}$ чини скуп матрица

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

Матрице $|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle$ су *линеарно независне* када је њихова линеарна комбинација једнака нултом вектору акко су коефицијенти у линеарној комбинацији сваки понаособ једнаки нули, што ће сада бити проверено

$$\begin{aligned}
&\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle=|0\rangle\\
\Rightarrow\ &\alpha_1\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_1\\ \alpha_1 & \alpha_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_3\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & \alpha_1+\alpha_3\\ \alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Да би последњи израз важио, потребно је да одговарајући матрични елементи у матрицама лево и десно од знака једнакости буду међусобно једнаки

$$\underline{\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}}\Rightarrow\underline{\begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_3=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}}\Rightarrow\underline{\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}}$$

Будући да су сва три коефицијента линеарне комбинације $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, то значи да су матрице $|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle$ *линеарно независне*.

(г) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{22}$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$: $|v_1\rangle=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}, |v_2\rangle=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}, |v_3\rangle=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -4 & 0\end{bmatrix}$

Базис простора $\mathbb{R}^{22}$ чини исти скуп матрица као и у случају (в)

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

Матрице $|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle$ су *линеарно независне* када је њихова линеарна комбинација једнака нултом вектору акко су коефицијенти у линеарној комбинацији сваки понаособ једнаки нули, што ће сада бити проверено

$$\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle=|0\rangle$$
$$\Leftrightarrow\ \alpha_1\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}3&-1\\2&2\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1&-5\\-4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}\alpha_1&2\alpha_1\\3\alpha_1&\alpha_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\alpha_2&-\alpha_2\\2\alpha_2&2\alpha_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_3&-5\alpha_3\\-4\alpha_3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3&2\alpha_1-\alpha_2-5\alpha_3\\3\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3&\alpha_1+2\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Да би последњи израз важио, потребно је да одговарајући матрични елементи у матрицама лево и десно од знака једнакости буду међусобно једнаки

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0\ /\cdot(-2)\\2\alpha_1-\alpha_2-5\alpha_3=0\\3\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3=0\\\alpha_1+2\alpha_2=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}-2\alpha_1-6\alpha_2-2\alpha_3=0\\2\alpha_1-\alpha_2-5\alpha_3=0\\3\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3=0\\\alpha_1+2\alpha_2=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}-7\alpha_2-7\alpha_3=0\\3\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3=0\\\alpha_1+2\alpha_2=0\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha_2=-\alpha_3\\3\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3=0\\\alpha_1=-2\alpha_2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha_2=-\alpha_3\\6\alpha_3-2\alpha_3-4\alpha_3=0\\\alpha_1=2\alpha_3\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha_2=-\alpha_3\\0\cdot\alpha_3=0\\\alpha_1=2\alpha_3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha_1=2\alpha_3\\\alpha_2=-\alpha_3\\\alpha_3\text{ - произвољан}\end{array}\right.$$

Будући да α_1,α_2 зависе од α_3 који је *произвољан* реалан број - не мора да буде само нула као у случају (а) - то значи да су матрице $|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle$ *линеарно зависне*.

(д) $\mathbb{V}=\mathbb{P}^4,\ \mathbb{F}=\mathbb{R}:\ \begin{array}{l}|v_1\rangle=(t-a)(t-b)\\|v_2\rangle=(t-b)(t-c)\\|v_3\rangle=(t-c)(t-a)\end{array}.$

Базис простора $\mathbb{P}^4$ исти је скуп функција као и у случају (а) и (б) $\{t^0,t^1,t^2,t^3\}\equiv\{1,t,t^2,t^3\}$.

Вектори $|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle$ су *линеарно независни* када је њихова линеарна комбинација једнака нултом вектору акко су коефицијенти у линеарној комбинацији сваки понаособ једнаки нули, што ће сада бити проверено

$$\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle=|0\rangle$$
$$\alpha_1(t-a)(t-b)+\alpha_2(t-b)(t-c)+\alpha_3(t-c)(t-a)=0$$
$$\alpha_1(t^2-at-bt+ab)+\alpha_2(t^2-bt-ct+bc)+\alpha_3(t^2-ct-at+ca)=0$$
$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t^2-\left[\alpha_1(a+b)+\alpha_2(b+c)+\alpha_3(c+a)\right]t+(\alpha_1ab+\alpha_2bc+\alpha_3ca)=0t^2+0t+0$$

Да би последњи израз важио, потребно је да коефицијенти уз $\{t^0, t^1, t^2, t^3\}$ са обе стране буду међусобно једнаки

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1(a+b)+\alpha_2(b+c)+\alpha_3(c+a)=0 \\ \alpha_1 ab+\alpha_2 bc+\alpha_3 ca=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3 \\ (-\alpha_2-\alpha_3)(a+b)+\alpha_2(b+c)+\alpha_3(c+a)=0 \\ (-\alpha_2-\alpha_3)ab+\alpha_2 bc+\alpha_3 ca=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3 \\ -\alpha_2 a-\alpha_2 b-\alpha_3 a-\alpha_3 b+\alpha_2 b+\alpha_2 c+\alpha_3 c+\alpha_3 a=0 \\ -\alpha_2 ab-\alpha_3 ab+\alpha_2 bc+\alpha_3 ca=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3 \\ -\alpha_2 a-\alpha_3 b+\alpha_2 c+\alpha_3 c=0 \\ -\alpha_2 ab-\alpha_3 ab+\alpha_2 bc+\alpha_3 ca=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3 \\ \alpha_2(c-a)-\alpha_3(b-c)=0 \\ \alpha_2 b(c-a)+\alpha_3 a(c-b)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3 \\ \alpha_2(c-a)=\alpha_3(b-c) \\ \alpha_2 b(c-a)+\alpha_3 a(c-b)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3 \\ \alpha_2=\alpha_3\dfrac{b-c}{c-a} \\ \alpha_3 b(b-c)+\alpha_3 a(c-b)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_3\dfrac{b-c}{c-a}-\alpha_3=-\alpha_3\dfrac{b-c+c-a}{c-a} \\ \alpha_2=\alpha_3\dfrac{b-c}{c-a} \\ \alpha_3(b^2-bc+ac-ab)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_3\dfrac{b-a}{c-a} \\ \alpha_2=\alpha_3\dfrac{b-c}{c-a} \\ \alpha_3\left[b^2-b(a+c)+ac\right]=0 \end{cases}$$

Будући да α_1, α_2 зависе од α_3, треба уочити да из треће једначине горњег система следе две могућности:

Прва је да је коефицијент α_3 једнак нули, у ком случају израз $b^2-b(a+c)+ac$ може бити различит од нуле; тада је скуп вектора $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ *линеарно независан*.

Друга могућност је да коефицијент α_3 буде различит од нуле, у ком случају израз $b^2 - b(a+c) + ac$ мора бити једнак нули, то јест

$$
\begin{aligned}
b^2 - b(a+c) + ac = 0 \;\Rightarrow\; & b_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac}}{2} \\
\Leftrightarrow\; & b_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac - 4ac}}{2} \\
\Leftrightarrow\; & b_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac}}{2} \\
\Leftrightarrow\; & b_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2} = \frac{(a+c) \pm (a-c)}{2} \\
\Rightarrow\; & \begin{cases} b_1 = \dfrac{(a+c)+(a-c)}{2} = \dfrac{a+c+a-c}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \\ b_2 = \dfrac{(a+c)-(a-c)}{2} = \dfrac{a+c-a+c}{2} = \dfrac{2c}{2} = c \end{cases}
\end{aligned}
$$

Значи да ће у потоњем случају систем вектора $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ бити *линеарно независан* само ако су константе a, b, c *различите међусобно*.

(2.3) У $\mathbb{R}^3$ су задати вектори $|v_1\rangle=(2,3,3)$, $|v_2\rangle=(4,7,8)$ и $|v_3\rangle=(2,4,\lambda)$. Одредити λ тако да дати вектори буду *линеарно зависни*.

Да би скуп вектора био линеарно зависан, потребно је да барем један од коефицијената у линеарној комбинацији буде различит од нуле, при чему линеарна комбинација мора бити једнака нултом вектору

$$\begin{aligned}
&\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle=|0\rangle\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1(2,3,3)+\alpha_2(4,7,8)+\alpha_3(2,4,\lambda)=(0,0,0)\\
\Leftrightarrow\ &(2\alpha_1,3\alpha_1,3\alpha_1)+(4\alpha_2,7\alpha_2,8\alpha_2)+(2\alpha_3,4\alpha_3,\lambda\alpha_3)=(0,0,0)\\
\Leftrightarrow\ &(2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3,3\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3,3\alpha_1+8\alpha_2+\lambda\alpha_3)=(0,0,0)
\end{aligned}$$

Вектори (представљени уређеним тројкама) са леве и десне стране су једнаки ако су им одговарајуће компоненте једнаке, чиме се добија систем од три линеарне једначине, који се погодније може представити у облику матричне формуле

$$\begin{cases}2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=0\\3\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3=0\\3\alpha_1+8\alpha_2+\lambda\alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&4&2\\3&7&4\\3&8&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Да би горе дати систем једначина имао нетривијална решења (значи да барем један од коефицијената у линеарној комбинацији буде различит од нуле), детерминанта квадратне матрице мора бити једнака нули

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}2&4&2\\3&7&4\\3&8&\lambda\end{vmatrix}=0\\
\Leftrightarrow\ &2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}7&4\\8&\lambda\end{vmatrix}+4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&4\\3&\lambda\end{vmatrix}+2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&7\\3&8\end{vmatrix}=0\\
\Leftrightarrow\ &2(7\lambda-32)-4(3\lambda-12)+2(24-21)=0\\
\Leftrightarrow\ &14\lambda-64-12\lambda+48+6=0\ \Leftrightarrow\ 2\lambda-64+54=0\ \Leftrightarrow\ \lambda=5
\end{aligned}$$

Значи да ће за добијену вредност λ скуп вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\}$ бити линеарно зависан, што се може проверити заменом добијене петице у горњи систем

$$\begin{cases}2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=0\\3\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3=0\,/\cdot(-1)\\3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=0\\-3\alpha_1-7\alpha_2-4\alpha_3=0\\3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=0\\\alpha_2=-\alpha_3\\3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha_1-4\alpha_3+2\alpha_3=0\\\alpha_2=-\alpha_3\\3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_3+\alpha_3=0\\\alpha_2=-\alpha_3\\3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ 3\alpha_3 - 8\alpha_3 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ (3-8+5)\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ 0 \cdot \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Дакле, коефицијенти α_1, α_2 линеарне комбинације зависе од коефицијента α_3. Он може бити било који реалан број, што је очигледно из треће једначине крајњег система $0 \cdot \alpha_3 = 0$. Будући да α_3 не мора да буде нула, скуп вектора $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ је *линеарно зависан*, све док је трећа компонента трећег вектора једнака *петици*.

(2.4) Нека је $\mathbb{V}$ векторски простор реалних функција реалне променљиве. Показати да су функције e^{2t}, t^2 и t *линеарно независне*.

Дате функције могу се формално схватити као вектори, те се од њих може направити линеарна комбинација која се изједначи са нултом функцијом

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 e^{2t} = 0.$$

Да би поменуте функције биле линеарно независне, сви коефицијенти понаособ у линеарној комбинацији морају бити једнаки нули, што ће сада бити проверено.

Да би се добио систем од три једначине за одређивање три непозната коефицијента α_1, α_2, α_3, у горњу формулу ће бити замењене три вредности за t, конкретно $t=0$, потом $t=1$ и на крају $t=-1$. Тако се добија следећи систем једначина

$$\begin{cases} \alpha_1 0 + \alpha_2 0^2 + \alpha_3 e^{2\cdot 0} = 0 \\ \alpha_1 1 + \alpha_2 1^2 + \alpha_3 e^{2\cdot 1} = 0 \\ \alpha_1(-1) + \alpha_2(-1)^2 + \alpha_3 e^{2(-1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 e^2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 e^{-2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ 2 \cdot \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Будући да су сва три коефицијента у линеарној комбинацији једнака нули, скуп дате три функције $\{t, t^2, e^{2t}\}$ је *линеарно независан*.

(2.5) Скуп од n вектора у $n-$димензионалном векторском простору $\mathbb{V}$ је *базис* АККО је испуњен бар један од услова (аутоматски је испуњен и онај други)

(а) скуп је линеарно независан

(б) скуп образује $\mathbb{V}$.

Доказати.

(а) Нека је скуп вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ *линеарно независан* у векторском простору $\mathbb{V}$.

$$\Downarrow$$

Стога скуп вектора $\{|v\rangle,|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ мора обавезно бити *линеарно зависан*, пошто је реч о скупу од $n+1$ вектора, а простор $\mathbb{V}$ је, према поставци задатка, $n-$димензионалан.

$$\Downarrow$$

Последица је да се вектор $|v\rangle$ може написати као *линеарна комбинација* скупа линеарно независних вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$, то јест $|v\rangle=\alpha_1|v_1\rangle+|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n|v_n\rangle$.

$$\Downarrow$$

Наравно, ово значи да скуп линеарно независних вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ *образује простор*, односно он представља *базис* простора $\mathbb{V}$.

* * *

(б) Ако би скуп вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ био *линеарно зависан*, било би могуће из њега избацити барем један вектор, само би тада, будући да поменути скуп вектора образује простор $\mathbb{V}$, испало да је простор $(n-1)-$димензионалан.

Ипак, у поставци задатка експлицитно је речено да је простор $\mathbb{V}$ ипак $n-$димензионалан, што значи да се, пошто скуп вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ образује простор, ниједан вектор из тог скупа не може избацити (приказати као линеарна комбинација осталих), те су стога вектори скупа $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ линеарно независни.

(2.6) Дат је простор $\mathbb{V}$, у њему скуп вектора $\mathbb{S}$ као и један произвољни вектор $|v\rangle$. Проверити да ли је $\mathbb{S}$ базис, а онда у њему написати вектор $|v\rangle$

(а) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$; $\mathbb{S}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$; $|v\rangle=(a,b,c)$, $|v'\rangle=(4,3,2)$;

(б) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{22}$; $\mathbb{S}=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}$; $|v\rangle=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, $|v'\rangle=\begin{bmatrix}6&7\\2&4\end{bmatrix}$;

(в) $\mathbb{V}=\mathbb{P}^4$; $\mathbb{S}=\{1,1-t,(1-t)^2,(1-t)^3\}$; $|v\rangle=a+bt+ct^2+dt^3$, $|v'\rangle=2-3t+t^2+2t^3$.

(а) Вектори (уређене тројке) задатог скупа представљаће базис простора $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ само ако су линеарно независни. Да би се то проверило, потребно је формирати линеарну комбинацију све три уређене тројке, изједначити је са нултим вектором (уређеном тројком нула) и испитати да ли су сва три коефицијента линеарне комбинације једнаки нули

$$\begin{aligned}&\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle=|0\rangle\\ \Rightarrow\quad&\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,0,0)=(0,0,0)\\ \Leftrightarrow\quad&(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1)=(0,0,0)\end{aligned}$$

Уређене тројке са леве и десне стране последњег израза међусобно су једнаке ако су им одговарајући чланови једнаки, чиме се добија систем од три једначине са три непознате који се крајње једноставно решава

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \quad\;\;\alpha_1+\alpha_2=0\\ \qquad\quad\;\alpha_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_3=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_1=0\end{cases}$$

Будући да су задате уређене тројке линеарно независне а има их три, што је једнако броју димензија простора $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, онда је њихов скуп $\mathbb{S}$ заиста *базис* датог простора.

Сад, вектор $|v\rangle=(a,b,c)$ наведен у поставци задатка задат је у *апсолутном базису* простора $\mathbb{R}^3$, кога чине следеће уређене тројке

$$|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0,0),\ |\mathrm{e}_2\rangle=(0,1,0),\ |\mathrm{e}_3\rangle=(0,0,1)$$

и то као линеарна комбинација горе наведених вектора

$$\begin{aligned}|v\rangle_{\{\mathrm{e}\}}&=(a,b,c)=(a+0+0,0+b+0,0+0+c)\\&=(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)=a|\mathrm{e}_1\rangle+b|\mathrm{e}_2\rangle+c|\mathrm{e}_3\rangle\end{aligned}$$

Исти вектор ће у *провереном базису* задатих вектора простора $\mathbb{R}^3$

$$|v_1\rangle=(1,1,1),\ |v_2\rangle=(1,1,0),\ |v_3\rangle=(1,0,0)$$

бити дат, на исти начин, као њихова линеарна комбинација

$$|v\rangle_{\mathbb{S}}=(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle,$$

једино је проблем у томе што коефицијенте α, β и γ у горњој линеарној комбинацији треба одредити. Пошто је вектор $|v\rangle$ исти било да је написан као линеарна комбинација вектора апсолутног било као линеарна комбинација вектора задатог базиса, оне се могу изједначити, са циљем да се непознати коефицијенти α,β,γ друге комбинације изразе преко познатих коефицијената a,b,c прве

$$\begin{aligned} |v\rangle_{\{\mathrm{e}\}} = |v\rangle_{\mathbb{S}} \;&\Leftrightarrow\; (a,b,c)_{\{\mathrm{e}\}} = (\alpha,\beta,\gamma)_{\mathbb{S}} \\ &\Leftrightarrow\; (a,b,c)_{\{\mathrm{e}\}} = \alpha(1,1,1)_{\{\mathrm{e}\}} + \beta(1,1,0)_{\{\mathrm{e}\}} + \gamma(1,0,0)_{\{\mathrm{e}\}} \\ &\Leftrightarrow\; (a,b,c)_{\{\mathrm{e}\}} = (\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta,\alpha)_{\{\mathrm{e}\}} \end{aligned}$$

Пошто су вектори са леве и десне стране последњег израза дати у апсолутном базису, могу се изједначити њихове компоненте, чиме се добија систем од три једначине са три непознате

$$\underline{\begin{cases} a=\alpha+\beta+\gamma \\ b=\alpha+\beta \\ c=\alpha \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} a=c+\beta+\gamma \\ b=c+\beta \\ \alpha=c \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} a=c+b-c+\gamma \\ \beta=b-c \\ \alpha=c \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} \gamma=a-b \\ \beta=b-c \\ \alpha=c \end{cases}}$$

Ово значи да се уопштени вектор $|v\rangle$ може представити у апсолутном базису и задатом базису као

$$|v\rangle = (a,b,c)_{\{\mathrm{e}\}} = (c,b-c,a-b)_{\mathbb{S}},$$

док се конкретни вектор $|v'\rangle$ може представити у апсолутном базису и задатом базису као

$$|v'\rangle = (4,3,2)_{\{\mathrm{e}\}} = (2,1,1)_{\mathbb{S}}$$

одакле је јасно да један исти вектор има различите компоненте у зависности од тога у ком базису се изражава, односно у зависности од тога из ког координатног система се посматра.

* * *

(б) Вектори (квадратне матрице) задатог скупа представљаће базис простора $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{22}$ само ако су линеарно независни. Да би се то проверило, потребно је формирати линеарну комбинацију све четири квадратне матрице, изједначити је са нултим вектором (нултом квадратном матрицом) и испитати да ли су сва четири коефицијента линеарне комбинације једнаки нули

$$\begin{aligned} &\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle+\alpha_4|v_4\rangle=|0\rangle \\ \Rightarrow\;& \alpha_1\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\;& \begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4\\ \alpha_2 & \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Квадратне матрице са леве и десне стране последњег израза међусобно су једнаке ако су им одговарајући матрични елементи једнаки, чиме се добија систем од четири једначине са четири непознате који се баш једноставно решава

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_3=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_4=0\end{cases}$$

Будући да су задате квадратне матрице линеарно независне а има их четири, што је једнако броју димензија простора $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{22}$, онда је њихов скуп $\mathbb{S}$ заиста *базис* датог простора.

Сад, квадратна матрица

$$|v\rangle=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

задата у поставци задатка изражена је преко *апсолутног базиса* простора $\mathbb{R}^{22}$, кога чине следеће матрице

$$|\mathrm{e}_1\rangle=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ |\mathrm{e}_2\rangle=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ |\mathrm{e}_3\rangle=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ |\mathrm{e}_4\rangle=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

и то као линеарна комбинација горе наведених квадратних матрица

$$\begin{aligned}|v\rangle_{\{\mathrm{e}\}}&=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+0+0+0 & 0+b+0+0\\ 0+0+c+0 & 0+0+0+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\\ &=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=a|\mathrm{e}_1\rangle+b|\mathrm{e}_2\rangle+c|\mathrm{e}_3\rangle+d|\mathrm{e}_4\rangle\end{aligned}$$

Исти вектор ће у *провереном базису* задатих квадратних матрица простора $\mathbb{R}^{22}$

$$|v_1\rangle=(1,1,1)\,,\ |v_2\rangle=(1,1,0)\,,\ |v_3\rangle=(1,0,0)$$

бити дат, на исти начин, као њихова линеарна комбинација

$$|v\rangle_{\mathbb{S}}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle+\delta|v_4\rangle,$$

једино је проблем у томе што коефицијенте α,β,γ и δ у горњој линеарној комбинацији треба одредити. Пошто је матрица $|v\rangle$ иста било да је написана као линеарна комбинација матрица апсолутног било као линеарна комбинација матрица задатог базиса, оне се могу изједначити, са циљем да се непознати коефицијенти $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ друге комбинације изразе преко познатих коефицијената a,b,c,d прве

$$\begin{aligned}|v\rangle_{\{\mathrm{e}\}}=|v\rangle_{\mathbb{S}}\ &\Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}_{\mathbb{S}}\\ &\Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}=\alpha\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}+\beta\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}+\gamma\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}+\delta\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}\\ &\Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta-\delta & \alpha+\gamma+\delta\\ \beta & \delta\end{bmatrix}_{\{\mathrm{e}\}}\end{aligned}$$

Пошто су и квадратна матрица са леве и квадратна матрица са десне стране последњег израза дате у апсолутном базису, њихови матрични елементи могу се изједначити, чиме се добија систем од четири једначине са четири непознате

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta - \delta \\ b = \alpha + \gamma + \delta \\ c = \beta \\ d = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha + c - d \\ b = \alpha + \gamma + d \\ \beta = c \\ \delta = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a - c + d \\ b = a - c + d + \gamma + d \\ \beta = c \\ \delta = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a - c + d \\ \gamma = -a + b + c - 2d \\ \beta = c \\ \delta = d \end{cases}$$

Ово значи да се уопштена квадратна матрица $|v\rangle$ може представити у апсолутном базису и задатом базису као

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\{e\}} = \begin{bmatrix} a - c + d & c \\ -a + b + c - 2d & d \end{bmatrix}_{\mathbb{S}},$$

док се конкретна квадратна матрица $|v'\rangle$ може представити у апсолутном базису и задатом базису као

$$|v'\rangle = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{\{e\}} = \begin{bmatrix} 6 - 2 + 4 & 2 \\ -6 + 7 + 2 - 2 \cdot 4 & 4 \end{bmatrix}_{\mathbb{S}} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}_{\mathbb{S}}$$

одакле је јасно да једна иста квадратна матрица има различите матричне елементе у зависности од тога у ком базису се изражава, односно у зависности од тога из ког координатног система се посматра.

* * *

(в) Вектори (полиноми) задатог скупа представљаће базис простора $\mathbb{V} = \mathbb{P}^4$ само ако су линеарно независни. Да би се то проверило, потребно је формирати линеарну комбинацију сва три полинома, изједначити је са нултим вектором (нултим полиномом) и испитати да ли су сва три коефицијента линеарне комбинације једнаки нули

$$\alpha_0 |v_0\rangle + \alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle + \alpha_3 |v_3\rangle = |0\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha_0 1 + \alpha_1 (1-t) + \alpha_2 (1-t)^2 + \alpha_3 (1-t)^3 = 0 \cdot 1 + 0\,t + 0t^2 + 0t^3$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 (1-t) + \alpha_2 (1 - 2t + t^2) + \alpha_3 (1 - 3t + 3t^2 - t^3) = 0 \cdot 1 + 0\,t + 0t^2 + 0t^3$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_1 t + \alpha_2 - 2\alpha_2 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 - 3\alpha_3 t + 3\alpha_3 t^2 - \alpha_3 t^3 = 0 \cdot 1 + 0\,t + 0t^2 + 0t^3$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot 1 - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) t + (\alpha_2 + 3\alpha_3) t^2 - \alpha_3 t^3 = 0 \cdot 1 + 0\,t + 0t^2 + 0t^3$$

Полиноми са леве и десне стране последњег израза међусобно су једнаки ако су им коефицијенти уз одговарајући степен од t једнаки, чиме се добија систем од четири једначине са четири непознате који се крајње једноставно решава

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\alpha_2=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_0=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}$$

Будући да су задати полиноми линеарно независни а њихов број је једнак броју димензија простора $\mathbb{V}=\mathbb{P}^4$, онда је задати скуп полинома $\mathbb{S}$ стварно *базис* датог простора.

Сад, вектор $|v\rangle=a+bt+ct^2+dt^3$ наведен у поставци задатка задат је у *апсолутном базису* простора $\mathbb{P}^4$, кога чине следећи полиноми

$$|\mathrm{e}_0\rangle=t^0=1,\ |\mathrm{e}_1\rangle=t^1=t,\ |\mathrm{e}_2\rangle=t^2,\ |\mathrm{e}_3\rangle=t^3$$

и то као линеарна комбинација горе наведених вектора

$$|v\rangle_{\{\mathrm{e}\}}=a+bt+ct^2+dt^3=a|\mathrm{e}_0\rangle+b|\mathrm{e}_1\rangle+c|\mathrm{e}_2\rangle+d|\mathrm{e}_3\rangle.$$

Исти вектор ће у *провереном базису* задатих вектора простора $\mathbb{P}^4$

$$|v_0\rangle=1,\ |v_1\rangle=(1-t),\ |v_2\rangle=(1-t)^2,\ |v_3\rangle=(1-t)^3$$

бити дат, на исти начин, као њихова линеарна комбинација

$$|v\rangle_{\mathbb{S}}=\alpha\cdot1+\beta(1-t)+\gamma(1-t)^2+\delta(1-t)^3=\alpha|v_0\rangle+\beta|v_1\rangle+\gamma|v_2\rangle+\delta|v_3\rangle,$$

једино је проблем у томе што коефицијенте α,β,γ и δ у горњој линеарној комбинацији треба одредити. Пошто је вектор $|v\rangle$ исти било да је написан као линеарна комбинација вектора апсолутног било као линеарна комбинација вектора задатог базиса, оне се могу изједначити, са циљем да се непознати коефицијенти $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ друге комбинације изразе преко познатих коефицијената a,b,c,d прве

$$\begin{aligned}|v\rangle_{\{\mathrm{e}\}}=|v\rangle_{\mathbb{S}}\ &\Leftrightarrow\ a+bt+ct^2+dt^3=\alpha\cdot1+\beta(1-t)+\gamma(1-t)^2+\delta(1-t)^3\\ &\Leftrightarrow\ a+bt+ct^2+dt^3=\alpha+\beta(1-t)+\gamma(1-2t+t^2)+\delta(1-3t+3t^2-t^3)\\ &\Leftrightarrow\ a+bt+ct^2+dt^3=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cdot1-(\beta+2\gamma+3\delta)t+(\gamma+3\delta)t^2-\delta t^3\end{aligned}$$

Пошто су полиноми са леве и десне стране последњег израза дати у апсолутном базису, њихове компоненте могу се изједначити, чиме се добија систем од четири једначине са четири непознате

$$\begin{cases}a=\alpha+\beta+\gamma+\delta\\ b=-\beta-2\gamma-3\delta\\ c=\gamma+3\delta\\ d=-\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\alpha+\beta+\gamma-d\\ b=-\beta-2\gamma+3d\\ c=\gamma-3d\\ \delta=-d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\alpha+\beta+c+3d-d\\ b=-\beta-2c-6d+3d\\ \gamma=c+3d\\ \delta=-d\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\alpha+\beta+c+2d \\ b=-\beta-2c-3d \\ \gamma=c+3d \\ \delta=-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\alpha-b-2c-3d+c+2d \\ \beta=-b-2c-3d \\ \gamma=c+3d \\ \delta=-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\alpha-b-c-d \\ \beta=-b-2c-3d \\ \gamma=c+3d \\ \delta=-d \end{cases}$$

односно, на крају

$$\begin{cases} \alpha=a+b+c+d \\ \beta=-b-2c-3d \\ \gamma=c+3d \\ \delta=-d \end{cases}$$

Ово значи да се уопштени вектор $|v\rangle$ може представити у апсолутном базису и задатом базису као

$$|v\rangle=(a+bt+ct^2+dt^3)_{\{e\}}=\left[(a+b+c+d)\cdot 1-(b+2c+3d)(1-t)+(c+3d)(1-t)^2-d(1-t)^3\right]_{\mathbb{S}},$$

док се конкретни вектор $|v'\rangle$ може представити у апсолутном базису и задатом базису као

$$\begin{aligned} |v'\rangle=(2-3t+t^2+2t^3)_{\{e\}} &=\left[(2-3+1+2)\cdot 1-(-3+2\cdot 1+3\cdot 2)(1-t)+(1+3\cdot 2)(1-t)^2-2(1-t)^3\right]_{\mathbb{S}} \\ &=\left[2\cdot 1-5(1-t)+7(1-t)^2-2(1-t)^3\right]_{\mathbb{S}} \end{aligned}$$

одакле је јасно да један исти вектор има различите компоненте у зависности од тога у ком базису се изражава, односно у зависности од тога из ког координатног система се посматра.

(2.7) Испитати да ли је следеће скупове вектора из $\mathbb{R}^4$ могуће допунити до базиса. Ако јесте, учинити то.

(а) $|v_1\rangle = (1,2,3,4)$, $|v_2\rangle = (5,6,7,8)$;

(б) $|v_1\rangle = (1,1,2,2)$, $|v_2\rangle = (1,1,0,0)$, $|v_3\rangle = (4,4,4,4)$.

(а) Векторима $|v_1\rangle = (1,2,3,4)$ и $|v_2\rangle = (5,6,7,8)$ треба придодати још два вектора да би се могао добити *базис* четвородимензионалног простора $\mathbb{R}^4$. Ипак, да би ова два вектора могли да буду елементи траженог базиса прво се мора проверити да ли су *линеарно независни*

$$\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \alpha_1(1,2,3,4) + \alpha_2(5,6,7,8) = (0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 5\alpha_2, 2\alpha_1 + 6\alpha_2, 3\alpha_1 + 7\alpha_2, 4\alpha_1 + 8\alpha_2) = (0,0,0,0)$$

Уређена четворка с леве стране последњег израза једнака је уређеној четворци с десне стране ако су им једнаке одговарајуће компоненте, чиме се добија систем од четири једначине с четири непознате

$$\begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ (3-2)\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Јасно је да су задата два вектора линеарно независни.

Следећи корак јесте пронаћи још два вектора којима би се два задата допунили до базиса четвородимензионалног простора $\mathbb{R}^4$. Очигледан кандидат јесте апсолутни базис поменутог простора, кога чине вектори

$$\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, |e_4\rangle\} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

који су проверено линеарно независни. Овом скупу ће бити додат задати вектор $|v_1\rangle = (1,2,3,4)$ који је линеарна комбинација вектора апсолутног базиса

$$|v_1\rangle = (1,2,3,4) = |e_1\rangle + 2|e_2\rangle + 3|e_3\rangle + 4|e_4\rangle.$$

Наравно да се онда један вектор из апсолутног базиса мора избацити и то онај који је линеарна комбинација осталих, рецимо вектор $|e_4\rangle$

$$|v_1\rangle = |e_1\rangle + 2|e_2\rangle + 3|e_3\rangle + 4|e_4\rangle \Leftrightarrow 4|e_4\rangle = |v_1\rangle - |e_1\rangle - 2|e_2\rangle - 3|e_3\rangle$$
$$\Leftrightarrow |e_4\rangle = \frac{1}{4}|v_1\rangle - \frac{1}{4}|e_1\rangle - \frac{2}{4}|e_2\rangle - \frac{3}{4}|e_3\rangle$$

Преостало је још да се провери да ли је скуп вектора $\{|v_1\rangle, |\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ линеарно независан, пошто само у том случају може бити базис простора $\mathbb{R}^4$

$$\alpha|v_1\rangle+\beta|\mathrm{e}_1\rangle+\gamma|\mathrm{e}_2\rangle+\delta|\mathrm{e}_3\rangle=|0\rangle$$
$$\Leftrightarrow\ \alpha(1,2,3,4)+\beta(1,0,0,0)+\gamma(0,1,0,0)+\delta(0,0,1,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta, 2\alpha+\gamma, 3\alpha+\delta, 4\alpha)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+\gamma=0\\ 3\alpha+\delta=0\\ 4\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\alpha\\ \gamma=-2\alpha\\ \delta=-3\alpha\\ \alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=0\\ \gamma=0\\ \delta=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

Јасно је да је поменути скуп вектора линеарно независан, те јесте базис простора $\mathbb{R}^4$.

Преостало је овом скупу додати задати вектор $|v_2\rangle=(5,6,7,8)$, али се онда мора избацити један вектор, рецимо $|\mathrm{e}_3\rangle$; да би се то могло учинити, мора се показати да вектор $|\mathrm{e}_3\rangle$ линеарна комбинација осталих

$$|v_2\rangle=5|\mathrm{e}_1\rangle+6|\mathrm{e}_2\rangle+7|\mathrm{e}_3\rangle+8|\mathrm{e}_4\rangle$$
$$\Leftrightarrow\ |v_2\rangle=5|\mathrm{e}_1\rangle+6|\mathrm{e}_2\rangle+7|\mathrm{e}_3\rangle+8\left(\frac{1}{4}|v_1\rangle-\frac{1}{4}|\mathrm{e}_1\rangle-\frac{2}{4}|\mathrm{e}_2\rangle-\frac{3}{4}|\mathrm{e}_3\rangle\right)$$
$$\Leftrightarrow\ |v_2\rangle=2|v_1\rangle+(5-2)|\mathrm{e}_1\rangle+(6-4)|\mathrm{e}_2\rangle+(7-6)|\mathrm{e}_3\rangle$$
$$\Leftrightarrow\ |v_2\rangle=2|v_1\rangle+3|\mathrm{e}_1\rangle+2|\mathrm{e}_2\rangle+|\mathrm{e}_3\rangle$$
$$\Rightarrow\ |\mathrm{e}_3\rangle=-2|v_1\rangle+|v_2\rangle-3|\mathrm{e}_1\rangle-2|\mathrm{e}_2\rangle$$

Само још треба проверити да ли је овако добијени скуп вектора $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle\}$ линеарно независан

$$\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|\mathrm{e}_1\rangle+\delta|\mathrm{e}_2\rangle=|0\rangle$$
$$\Leftrightarrow\ \alpha(1,2,3,4)+\beta(5,6,7,8)+\gamma(1,0,0,0)+\delta(0,1,0,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\ (\alpha+5\beta+\gamma, 2\alpha+6\beta+\delta, 3\alpha+7\beta, 4\alpha+8\beta)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+5\beta+\gamma=0\\ 2\alpha+6\beta+\delta=0\\ 3\alpha+7\beta=0\\ 4\alpha+8\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+5\beta+\gamma=0\\ 2\alpha+6\beta+\delta=0\\ 3\alpha+7\beta=0\\ \alpha+2\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+5\beta+\gamma=0\\ 2\alpha+6\beta+\delta=0\\ -6\beta+7\beta=0\\ \alpha=-2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=0\\ \delta=0\\ \beta=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

Дакле, вектори $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ су допуњени до базиса њиховим додавањем векторима апсолутног базиса $|\mathrm{e}_1\rangle$ и $|\mathrm{e}_2\rangle$. Новонастали базис простора $\mathbb{R}^4$ је следећи скуп линеарно независних вектора

$$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle\}=\{(1,2,3,4),(5,6,7,8),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}.$$

(б) Вектори које треба допунити су $|v_1\rangle = (1,1,2,2)$, $|v_2\rangle = (1,1,0,0)$, $|v_3\rangle = (4,4,4,4)$.

Ипак, треба се запитати да ли они могу да чине базис простора $\mathbb{R}^4$, односно да ли су *линеарно независни*

$$\begin{aligned} & \alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle + \alpha_3|v_3\rangle = |0\rangle \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1(1,1,2,2) + \alpha_2(1,1,0,0) + \alpha_3(4,4,4,4) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_3) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Уређена четворка с леве стране последњег израза једнака је уређеној четворци с десне стране ако су им једнаке одговарајуће компоненте, чиме се добија систем од четири једначине с четири непознате

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha_3 - 2\alpha_3 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-4)\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 \text{ - произвољно} \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

Значи, задати вектори су *линеарно зависни* те као такви и не могу формирати базис без обзира на то који вектор би им био додат.

(2.8) Између $\mathbb{R}^{32}$ и $\mathbb{P}^{6}$ успостављен је изоморфизам $f:\mathbb{R}^{32}\to\mathbb{P}^{6}$ на следећи начин

$$f\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}_{2\times3}\right)=2$$

$$f\left(\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{2\times3}\right)=3-t$$

$$f\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}\right)=1+t^2$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}\right)=2-2t+t^3+t^4$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}_{2\times3}\right)=3+t-t^2+2t^4+3t^5$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}_{2\times3}\right)=5+4t-3t^2-t^3$$

(а) Наћи *полином* који се задатим изоморфизмом пресликава у матрицу

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3};$$

(б) наћи *матрицу* која се задатим изоморфизмом пресликава у полином

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5.$$

(а) Прво се задата матрица изрази преко три матрице (од шест задатих у поставци)

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}-\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{2\times3}\right).$$

Потом се три матрице с десне стране горњег израза задатим изоморфизмом пресликавају у одговарајуће полиноме

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}\xrightarrow{f}\frac{1}{2}\left[(1+t^2)+(2-2t+t^3+t^4)-(3-t)\right]$$

или

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}\xrightarrow{f}\frac{1}{2}\left[(1+2-3)+(1-2)t+t^2+t^3+t^4\right]$$

и, на крају

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{2\times3}\xrightarrow{f}\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^4.$$

(б) Прво се задати полином напише као линеарна комбинација шест датих полинома

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5=\alpha(2)+\beta(3-t)+\gamma(1+t^2)+\delta(2-2t+t^3+t^4)$$
$$+\eta(3+t-t^2+2t^4+3t^5)+\mu(5+4t-3t^2-t^3)$$

Након груписања чланова по растућим степенима од t добија се

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5=(2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta+3\eta+5\mu)+(-\beta-2\delta+\eta+4\mu)t$$
$$+(\gamma-\eta-3\mu)t^2+(\delta-\mu)t^3+(\delta+2\eta)t^4+3\eta t^5$$

Полиноми са леве и десне стране горњег израза једнаки су само ако су им једнаки коефицијенти уз одговарајуће степене од t, чиме се добија следећи систем једначина

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta+3\eta+5\mu=1\\-\beta-2\delta+\eta+4\mu=-1\\\gamma-\eta-3\mu=1\\\delta-\mu=-1\\\delta+2\eta=1\\3\eta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta+3\eta+5\mu=1\\-\beta-2\delta+\eta+4\mu=-1\\\gamma-\eta-3\mu=1\\\delta-\mu=-1\\\delta+2\left(-\frac{1}{3}\right)=1\\\eta=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta+3\eta+5\mu=1\\-\beta-2\delta+\eta+4\mu=-1\\\gamma-\eta-3\mu=1\\\frac{5}{3}-\mu=-1\\\delta=\frac{5}{3},\eta=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta+3\eta+5\mu=1\\-\beta-2\delta+\eta+4\mu=-1\\\gamma+\frac{1}{3}-3\cdot\frac{8}{3}=1\\\mu=\frac{8}{3},\delta=\frac{5}{3},\eta=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta+3\eta+5\mu=1\\-\beta-2\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+4\frac{8}{3}=-1\\\gamma=\frac{26}{3},\mu=\frac{8}{3},\delta=\frac{5}{3},\eta=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3\frac{24}{3}+\frac{26}{3}+2\frac{5}{3}-3\frac{1}{3}+5\frac{8}{3}=1\\\beta=\frac{24}{3},\gamma=\frac{26}{3},\mu=\frac{8}{3},\delta=\frac{5}{3},\eta=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

чиме су на крају добијени тражени скалари

$$\alpha=-\frac{71}{3},\ \beta=\frac{24}{3},\ \gamma=\frac{26}{3},\ \mu=\frac{8}{3},\ \delta=\frac{5}{3},\ \eta=-\frac{1}{3}.$$

Значи, задати полином се може писати као следећа линеарна комбинација датих полинома

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5=-\frac{71}{3}(2)+\frac{24}{3}(3-t)+\frac{26}{3}(1+t^2)+\frac{5}{3}(2-2t+t^3+t^4)$$
$$-\frac{1}{3}(3+t-t^2+2t^4+3t^5)+\frac{8}{3}(5+4t-3t^2-t^3)$$

а пошто су познате матрице у које се они претварају изоморфизмом, следи да је тражена матрица дата као

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5 \xrightarrow{f} -\frac{71}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}+\frac{24}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}+\frac{26}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}$$
$$+\frac{5}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}+\frac{8}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

односно

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5 \xrightarrow{f} \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-71+24+26 & 24+5+8 & -1\\ -71-1 & 8 & 26+5\end{bmatrix}_{2\times3}$$

те је коначно матрица из простора $\mathbb{R}^{32}$ у коју изоморфизмом f прелази дати полином из простора $\mathbb{P}^6$ једнака

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5 \xrightarrow{f} \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-21 & 37 & -1\\ -72 & 8 & 31\end{bmatrix}_{2\times3}.$$